

# 位相空間の開集合圏上のGrothendieck位相の分類、空集合の像、および具体例に関する詳細な考察

## はじめに

本稿では、任意の位相空間  $X$  から定まる開集合系の圏  $\text{Open}(X)$  上に定義可能なすべての Grothendieck 位相の分類について解説します。圏論的トポロジーおよびトポス理論において、幾何学的空間の性質を「被覆のルール」という観点から抽象化したものが Grothendieck 位相です。本稿の本質的な結論として、 $\text{Open}(X)$  上の Grothendieck 位相の全体は、完備 Heyting 代数としての  $\text{Open}(X)$  上の「核 (nucleus)」の全体、あるいは同値な概念である「部分ロケール (sublocale)」の全体と一対一に対応し、完全に分類されます。以下では、これらの基本概念の厳密な定義から始め、分類定理の完全な証明、核における空集合の像に関する重要な注意、そして様々な Grothendieck 位相の具体例とそのトポス論的帰結について詳しく論じます。

## 1. 基礎概念の準備

まず、議論の舞台となる圏  $\text{Open}(X)$  の代数的・圏論的性質を整理し、篩 (sieve) および Grothendieck 位相の定義を与えます。

### 定義 1.1 (開集合圏と Heyting 代数構造)

位相空間  $X$  の開集合全体の集合を  $\text{Open}(X)$  と表記する。 $\text{Open}(X)$  は集合の包含関係  $\subset$  により半順序集合となる。この半順序集合を自然に圏とみなしたものを開集合圏と呼び、同じく  $\text{Open}(X)$  と表記する。すなわち、対象は開集合  $U \subset X$  であり、射  $V \rightarrow U$  は包含関係  $V \subset U$  が成り立つときに限り唯一存在する。

圏  $\text{Open}(X)$  は任意の和集合 (結び  $\cup$ ) と有限の共通部分 (交わり  $\cap$ ) を持つため、完備分配格子をなす。さらに、任意の開集合  $U, V \subset X$  に対して、以下で定義される含意 (implication) 演算  $\Rightarrow$  が存在するため、 $\text{Open}(X)$  は完備 Heyting 代数 (complete Heyting algebra) の構造を持つ:

$$U \Rightarrow V = \text{Int}((X \setminus U) \cup V)$$

ここで  $\text{Int}$  は内部 (interior) を表す。また、開集合  $U$  の否定 (negation)  $\neg U$  は以下のように定義される:

$$\neg U = U \Rightarrow \emptyset = \text{Int}(X \setminus U)$$

### 定義 1.2 (篩)

圏  $\text{Open}(X)$  の対象  $U$  上の篩 (sieve)  $S$  とは、 $U$  の開部分集合の族であって、下方に閉じているもののことである。すなわち、次を満たす集合族  $S \subset \text{Open}(X)$  である:

$$V \in S \text{ かつ } W \subset V \implies W \in S$$

対象  $U$  上の最大の篩は、 $U$  の開部分集合すべてからなる篩であり、これを  $\downarrow U$  と表記する。また、任意の篩  $S$  の元となっている開集合すべての和集合を  $\bigcup S$  と書く。

### 定義 1.3 (Grothendieck 位相)

圏  $\text{Open}(X)$  上の Grothendieck 位相 (Grothendieck topology)  $J$  とは、各対象  $U \in \text{Open}(X)$  に対して  $U$  上の篩の集合

$J(U)$  を割り当てる写像であって、以下の3条件を満たすもののことである。 $J(U)$  に属する篩を「 $U$  の  $J$  被覆篩」と呼ぶ。

- 最大性 (maximality):** 任意の  $U \in \text{Open}(X)$  に対して、 $\downarrow U \in J(U)$  である。
- 安定性 (stability):**  $S \in J(U)$  であり、かつ  $W \subset U$  であるならば、篩の引き戻し (pullback)  $S \cap W = \{V \in S \mid V \subset W\}$  は  $J(W)$  に属する。
- 推移性 (transitivity):**  $S \in J(U)$  であり、 $R$  が  $U$  上の篩であるとする。任意の  $V \in S$  に対して、引き戻し  $R \cap V$  が  $J(V)$  に属するならば、 $R \in J(U)$  である。

#### 定義 1.4 (核)

完備 Heyting 代数  $\text{Open}(X)$  上の写像  $j: \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  が核 (nucleus) であるとは、任意の開集合  $U, V \in \text{Open}(X)$  に対して以下の3条件を満たす閉包作用素のことである:

- 拡張性 (inflationary):**  $U \subset j(U)$
- 冪等性 (idempotent):**  $j(j(U)) = j(U)$
- 有限交差保存性 (preservation of finite intersections):**  $j(U \cap V) = j(U) \cap j(V)$

## 2. Grothendieck 位相の核による分類定理

ここでは、 $\text{Open}(X)$  上の Grothendieck 位相の全体と、 $\text{Open}(X)$  上の核の全体が一一に対応するという中心的な定理を提示し、その完全な証明を与えます。

#### 定理 2.1 (分類定理)

開集合圏  $\text{Open}(X)$  上の Grothendieck 位相の全体と、 $\text{Open}(X)$  上の核の全体の間には、一一の全単射の対応が存在する。

#### 証明

証明は以下の3つのステップに分けて行われる。

##### ステップ 1: 核から Grothendieck 位相への構成

$\text{Open}(X)$  上の核  $j$  が与えられたとき、各開集合  $U \in \text{Open}(X)$  上の篩  $S$  に対して、写像  $J_j$  を次のように定義する:

$$J_j(U) = \left\{ S \subset \downarrow U \mid j\left(\bigcup S\right) = j(U) \right\}$$

この  $J_j$  が Grothendieck 位相の3公理を満たすことを示す。

- 最大性:**  $S = \downarrow U$  のとき、明らかに  $\bigcup S = U$  である。したがって  $j(\bigcup S) = j(U)$  となり、 $\downarrow U \in J_j(U)$  が成り立つ。
- 安定性:**  $S \in J_j(U)$  かつ  $W \subset U$  とする。このとき  $j(\bigcup S) = j(U)$  である。引き戻し  $S \cap W = \{V \in S \mid V \subset W\}$  の和集合を考えると、 $S$  が下方閉じていることから  $\bigcup(S \cap W) = (\bigcup S) \cap W$  が成り立つ。これに核  $j$  を適用し、有限交差保存性を用いると以下を得る:

$$j\left(\bigcup(S \cap W)\right) = j\left(\left(\bigcup S\right) \cap W\right) = j\left(\bigcup S\right) \cap j(W) = j(U) \cap j(W)$$

ここで  $W \subset U$  であることと核の単調性 ( $A \subset B \implies j(A) = j(A \cap B) = j(A) \cap j(B) \implies j(A) \subset j(B)$ ) から、 $j(W) \subset j(U)$  である。したがって、 $j(U) \cap j(W) = j(W)$  となり、次が成り立つ:

$$j\left(\bigcup(S \cap W)\right) = j(W)$$

ゆえに  $S \cap W \in J_j(W)$  となり、安定性が示された。

(3) 推移性:  $S \in J_j(U)$  (すなわち  $j(\bigcup S) = j(U)$ ) であり、 $R$  を  $U$  上の篩とする。任意の  $V \in S$  に対して  $R \cap V \in J_j(V)$  (すなわち  $j(\bigcup(R \cap V)) = j(V)$ ) が成り立つと仮定する。先ほどと同様に  $\bigcup(R \cap V) = (\bigcup R) \cap V$  であるから、仮定は  $j((\bigcup R) \cap V) = j(V)$ 、すなわち  $j(\bigcup R) \cap j(V) = j(V)$  と書き換えられる。これは任意の  $V \in S$  に対して  $j(V) \subset j(\bigcup R)$  が成り立つことを意味する。したがって、両辺の  $V \in S$  にわたる和集合をとることで次を得る:

$$\bigcup_{V \in S} j(V) \subset j(\bigcup R)$$

ここで、核  $j$  の一般の性質として、任意の開集合族  $\{U_i\}_{i \in I}$  に対して  $j(\bigcup_{i \in I} U_i) = j(\bigcup_{i \in I} j(U_i))$  が成り立つことに注意する。実際、拡張性より  $\bigcup U_i \subset \bigcup j(U_i) \subset j(\bigcup U_i)$  であり、両辺を  $j$  で送れば冪等性と単調性から等号が従う。これを用いると、

$$j(U) = j(\bigcup S) = j\left(\bigcup_{V \in S} V\right) = j\left(\bigcup_{V \in S} j(V)\right) \subset j\left(j(\bigcup R)\right) = j(\bigcup R)$$

が得られる。一方、 $R$  は  $U$  上の篩であるから  $\bigcup R \subset U$  であり、単調性より  $j(\bigcup R) \subset j(U)$  である。ゆえに  $j(\bigcup R) = j(U)$  となり、 $R \in J_j(U)$  が示された。以上より  $J_j$  は Grothendieck 位相である。

### ステップ 2: Grothendieck 位相から核への構成

$\text{Open}(X)$  上の Grothendieck 位相  $J$  が与えられたとき、写像  $j_J: \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  を次のように定義する:

$$j_J(U) = \bigcup \{W \in \text{Open}(X) \mid \downarrow(W \cap U) \in J(W)\}$$

この  $j_J$  が核の3条件を満たすことを示す。

(1) 拡張性:  $W = U$  とおくと、 $\downarrow(U \cap U) = \downarrow U$  となり、最大性公理から  $\downarrow U \in J(U)$  である。したがって、 $U$  自身が定義の和集合の候補に含まれるため、 $U \subset j_J(U)$  が成り立つ。

(2) 有限交差保存性: まず、定義から単調性  $A \subset B \implies j_J(A) \subset j_J(B)$  が成り立つことを確認する。実際、 $\downarrow(W \cap A) \subset \downarrow(W \cap B)$  であり、Grothendieck 位相の推移性から、ある篩が含まれればそれを含むより大きな篩もまた  $J(W)$  に属するため、 $\downarrow(W \cap A) \in J(W) \implies \downarrow(W \cap B) \in J(W)$  となる。これより単調性が従い、 $j_J(U \cap V) \subset j_J(U) \cap j_J(V)$  は自動的に得られる。逆向きの包含を示すため、 $\downarrow(W_1 \cap U) \in J(W_1)$  および  $\downarrow(W_2 \cap V) \in J(W_2)$  を満たす任意の開集合  $W_1, W_2$  をとる。 $W = W_1 \cap W_2$  とおく。安定性公理より、 $\downarrow(W_1 \cap U) \cap W = \downarrow(W \cap U) \in J(W)$  および  $\downarrow(W_2 \cap V) \cap W = \downarrow(W \cap V) \in J(W)$  が同時に成り立つ。ここで  $W$  上の篩  $R = \downarrow(W \cap U)$  を考えると、任意の  $K \in R$  (すなわち  $K \subset W \cap U$ ) に対して、篩  $S = \downarrow(W \cap U \cap V)$  の  $K$  への引き戻しは  $S \cap K = \downarrow(K \cap V)$  となる。 $K \subset W \subset W_2$  であるから、 $\downarrow(W \cap V) \in J(W)$  の  $K$  への引き戻しもまた安定性より  $\downarrow(K \cap V) \in J(K)$  となる。したがって、任意の  $V' \in R$  に対して  $S \cap V' \in J(V')$  が成り立つため、推移性公理より  $S = \downarrow(W \cap U \cap V) \in J(W)$  が得られる。miniature これは  $W_1 \cap W_2 \subset j_J(U \cap V)$  を意味し、すべての  $W_1, W_2$  の組み合わせについて和集合をとることで、 $j_J(U) \cap j_J(V) \subset j_J(U \cap V)$  が示された。

(3) 冪等性: 拡張性より  $j_J(U) \subset j_J(j_J(U))$  は自明であるから、逆向きの包含  $j_J(j_J(U)) \subset j_J(U)$  を示す。 $\downarrow(W \cap j_J(U)) \in J(W)$  を満たす任意の  $W$  をとる。 $S = \downarrow(W \cap j_J(U))$  とおく。任意の  $V \in S$  に対して  $V \subset j_J(U)$  である。 $j_J(U)$  の定義より、 $V$  は  $\downarrow(K \cap U) \in J(K)$  を満たす開集合  $K$  たちの和集合で覆われる。安定性公理と推移性公理を組み合わせることで、 $\downarrow(V \cap U) \in J(V)$  が任意の  $V \in S$  について成り立つことがわかる。したがって、 $W$  上の篩  $\downarrow(W \cap U)$  の任意の  $V \in S$  への引き戻しは  $\downarrow(W \cap U) \cap V = \downarrow(V \cap U) \in J(V)$  となる。再び推移性公理を適用すれば、 $\downarrow(W \cap U) \in J(W)$  が得られる。ゆえに  $W \subset j_J(U)$  となり、和集合をとることで  $j_J(j_J(U)) \subset j_J(U)$  が示された。

### ステップ 3: 互いに逆の対応であることの証明

核  $j$  に対して  $j_{J_j} = j$  となることを示す。定義を展開すると次式を得る:

$$j_{J_j}(U) = \bigcup \{W \mid \downarrow(W \cap U) \in J_j(W)\} = \bigcup \{W \mid j(W \cap U) = j(W)\}$$

核の有限交差保存性より、 $j(W \cap U) = j(W) \iff j(W) \subset j(U)$  である。拡張性から  $W \subset j(W) \subset j(U)$  であるため、このような  $W$  の全体の和集合は  $j(U)$  に含まれる。また、 $W = j(U)$  自身について考えると、冪等性より  $j(j(U)) \subset j(U)$  となり条件を満たす。したがって、和集合はまさに  $j(U)$  そのものになり、 $j_{J_j}(U) = j(U)$  が成り立つ。

次に、Grothendieck 位相  $J$  に対して  $J_{j_J} = J$  となることを示す。

$$S \in J_{j_j}(U) \iff j_j(\bigcup S) = j_j(U) \iff \forall W, (\downarrow(W \cap \bigcup S) \in J(W) \iff \downarrow(W \cap U) \in J(W))$$

ここで  $W = U$  とおくと、右辺は最大性より常に真であるため、 $S \in J_{j_j}(U) \implies \downarrow(\bigcup S) \in J(U)$  が従う。ここで、一般に  $S \in J(U) \iff \downarrow(\bigcup S) \in J(U)$  が成り立つ。実際、 $S \in J(U)$  ならば包含関係  $S \subset \downarrow(\bigcup S)$  と推移性から  $\downarrow(\bigcup S) \in J(U)$  であり、逆に  $\downarrow(\bigcup S) \in J(U)$  であれば、任意の  $V \subset \bigcup S$  に対して  $S \cap V \in J(V)$  が開被覆の貼り合わせから従うため、推移性により  $S \in J(U)$  となる。したがって、 $S \in J_{j_j}(U) \iff S \in J(U)$  が示され、 $J_{j_j} = J$  が完全に証明された。

### 3. 空集合の像 $j(\emptyset)$ と稠密性に関する注意

本節では、核の定義および Grothendieck 位相の公理にまつわる重要な注意点を解説します。インフォーマルな問いとして「核の定義において  $j(\emptyset) = \emptyset$  という条件を仮定しなくてもよいのか」という疑問が生じるのは極めて自然ですが、結論から言えば、\*\*この条件を仮定する必要はありません\*\*<sup>\*\*</sup>。その理由と、これが持つトポス論的意味について詳しく見ていきましょう。

#### 注意 3.1 ( $j(\emptyset) = \emptyset$ の不必要性と稠密性)

定義 1.4 で与えられた核の3条件（拡張性・冪等性・有限交差保存性）からは、 $j(\emptyset) = \emptyset$  は自動的に導かれない。そして、この条件を前提として要求してしまうと、トポス論において非常に重要となる広範な幾何学的対象（閉部分空間など）を分類する Grothendieck 位相を排除してしまうことになる。

トポス論およびロケール理論において、 $j(\emptyset) = \emptyset$  を満たす核、あるいはそれに対応する Grothendieck 位相は**稠密である (dense)** と定義される。

- **直観的な意味：**  $j(\emptyset)$  とは、「空の篩  $\emptyset$ （すなわち、いかなる開集合も含まない空の族）」が被覆として機能してしまう最大の開集合を意味する。層の内部論理（直観主義論理）において、空の篩による被覆は「偽 ( $\perp$ )」が「真 ( $\top$ )」に等しくなることを意味するため、 $j(\emptyset)$  の内部領域では空間のトポロジーが完全に「自明に潰れて」しまっている。
- したがって、 $j(\emptyset) = \emptyset$  という条件は、\*\*「空間が自明に潰れて論理が破綻してしまう領域がどこにも存在しないこと」\*\* を保証する性質であり、公理ではなく核の「良さ」を表す指標の一つとして扱われる。

各具体例において  $j(\emptyset)$  がどのような値をとるか、および稠密性が成り立つかどうかの対応を以下の表にまとめます。各具体例の厳密な定義と証明は次節で行います。

Grothendieck 位相 (核 $j$ ) の例	空集合の像 $j(\emptyset)$ の値	稠密性 ( $j(\emptyset) = \emptyset$ )	トポス論的・幾何学的意味
カノニカル位相 $j_{\text{can}}$	$\emptyset$	稠密である	通常の開被覆。空間を一切潰さない。
二重否定位相 $j_{\neg\neg}$	$\text{Int}(\text{Cl}(\emptyset)) = \emptyset$	稠密である	最大の稠密な位相。内部論理で排中律が成立。
閉部分空間 $F$ への制限位相 $j_F$	$X \setminus F$	一般には稠密ではない ( $F = X$ のみ稠密)	$F$ の外側を完全に潰すため、 $j(\emptyset) = X \setminus F \neq \emptyset$ となる。
開部分空間 $Y$ への制限位相 $j^Y$	$\text{Int}(X \setminus Y) = X \setminus \text{Cl}(Y)$	一般には稠密ではない ( $Y$ が稠密開集合のときのみ稠密)	$Y$ の外側の内部領域を完全に潰す。

特に、\*\*二重否定位相  $j_{\neg\neg}$ \*\* は、「 $j(\emptyset) = \emptyset$  を満たすすべての核の中で最大の核（最も条件が緩い稠密な位相）」という極めて美しい普遍性を持っています。

## 4. 具体例とそのトポス論的帰結

本節では、具体的な核  $j$  を提示し、それが誘導する Grothendieck 位相の構造、およびその上の層 (sheaf) の圏 (すなわちトポス) の性質について詳細に解説します。

### 例 4.1: カノニカル位相 (canonical topology)

古典的な層論の舞台となる、最も標準的な位相です。

#### 例 4.1 (カノニカル位相)

写像  $j_{\text{can}} : \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  を恒等写像として定義する：

$$j_{\text{can}}(U) = U$$

これが核の3条件を満たすことは自明である。この核が誘導する Grothendieck 位相  $J_{\text{can}}$  において、篩  $S \in J_{\text{can}}(U)$  であるための条件は次のように書き下される：

$$\bigcup S = U$$

これは、通常の位相空間論における「開集合族による通常の開被覆」そのものである。この位相に関する層の圏  $\text{Sh}_{J_{\text{can}}}(X)$  は、通常の幾何学で扱われる「 $X$  上の層の圏  $\text{Sh}(X)$ 」に完全に一致する。

### 例 4.2: 二重否定位相 ( $\neg\neg$ 位相 / dense topology)

数理論理学の強制法や、トポス内部での排中律の強制と直結する極めて重要な位相です。

#### 例 4.2 (二重否定位相)

写像  $j_{\neg\neg} : \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  を、開集合の閉包の内部として定義する：

$$j_{\neg\neg}(U) = \neg(\neg U) = \text{Int}(\text{Cl}(U))$$

この作用素によって不変な開集合 ( $j_{\neg\neg}(U) = U$ ) は**正則開集合 (regular open set)** と呼ばれる。これが核をなすことの完全な証明、および被覆の条件は以下の通りである。

#### $j_{\neg\neg}$ が核であることの証明

(1) 拡張性: 任意の開集合  $U$  に対して  $U \subset \text{Cl}(U)$  であり、 $U$  は開集合であるから、両辺の内部をとることで  $U = \text{Int}(U) \subset \text{Int}(\text{Cl}(U)) = j_{\neg\neg}(U)$  を得る。

(2) 冪等性: 一般の位相空間において  $\text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(U))) = \text{Cl}(U)$  が成り立つことを示す。拡張性より  $U \subset \text{Int}(\text{Cl}(U))$  であるから、両辺の閉包をとれば  $\text{Cl}(U) \subset \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(U)))$  である。逆に、包含関係  $\text{Int}(\text{Cl}(U)) \subset \text{Cl}(U)$  の両辺の閉包をとると、 $\text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(U))) \subset \text{Cl}(\text{Cl}(U)) = \text{Cl}(U)$  となる。したがって、両者の包含関係から  $\text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(U))) = \text{Cl}(U)$  が成り立つ。この両辺の内部をとることにより、次が得られる：

$$j_{\neg\neg}(j_{\neg\neg}(U)) = \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(U)))) = \text{Int}(\text{Cl}(U)) = j_{\neg\neg}(U)$$

(3) 有限交差保存性: 任意の開集合  $U, V$  について、 $\text{Cl}(U \cap V) \subset \text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V)$  より、 $j_{\neg\neg}(U \cap V) \subset \text{Int}(\text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V)) = \text{Int}(\text{Cl}(U)) \cap \text{Int}(\text{Cl}(V)) = j_{\neg\neg}(U) \cap j_{\neg\neg}(V)$  である。逆向きの包含を示すため、開集合  $W = \text{Int}(\text{Cl}(U)) \cap \text{Int}(\text{Cl}(V))$  とおく。  $W \subset \text{Cl}(U)$  であり、 $W$  は開集合であるため、 $W \subset \text{Cl}(W \cap U)$  が成り立つ (実際、 $x \in W$  の任意の開近傍  $G$  に対し、 $G \cap W$  は空でない開集合であり、 $W \subset \text{Cl}(U)$  より  $(G \cap W) \cap U \neq \emptyset$  となるため  $x \in \text{Cl}(W \cap U)$  である)。同様に、開集合  $W \cap U$  は  $\text{Cl}(V)$  に含まれるため、 $W \cap U \subset \text{Cl}(W \cap U \cap V)$  が成り立つ。両辺の閉包をとると  $\text{Cl}(W \cap U) \subset \text{Cl}(W \cap U \cap V)$  である。これらを繋ぐことで次を得る：

$$W \subset \text{Cl}(W \cap U) \subset \text{Cl}(W \cap U \cap V) \subset \text{Cl}(U \cap V)$$

$W$  は開集合であるから、両辺の内部をとることで  $W \subset \text{Int}(\text{Cl}(U \cap V)) = j_{\neg}(U \cap V)$  が示された。

## 被覆の条件と直観的意味

篩  $S \in J_{\neg}(U)$  であるための条件は、 $\text{Int}(\text{Cl}(\bigcup S)) = \text{Int}(\text{Cl}(U))$  である。特に全空間  $U = X$  においては、 $\text{Cl}(\bigcup S) = X$ 、すなわち「被覆の和集合が  $X$  において稠密 (dense) であること」と同値になる。この位相の目から見ると、稠密開集合は単体で全空間を被覆しているとみなされ、内点を持たない閉集合（境界や孤立点など）の欠落はすべて「無視可能なゴミ」として判定される。前述の通り  $j_{\neg}(\emptyset) = \emptyset$  であるため、この論理的なシワ伸ばしを行っても空間が自明に潰れる領域は存在しない。

## トポス論的帰結

カノニカル位相による層の圏  $\text{Sh}(X)$  の内部論理は、一般には排中律が成立しない直観主義論理である。しかし、この二重否定位相による層の圏  $\text{Sh}_{\neg}(X)$  に移行すると、\*\*内部論理において排中律  $P \vee \neg P$  が強制的に成立する\*\*ようになり、ブールトポス (Boolean topos) が実現される。空間  $X$  が任意の開集合の閉包が再び開集合（すなわち clopen）になるような**超不連結 (extremally disconnected)**空間である場合、正則開集合はすべて clopen となり、この世界での層の挙動は古典的な集合圏に極めて近い平滑化されたものとなる。

## 例 4.3: 閉部分空間への制限位相 (closed subtopos)

空間の一部（閉集合）にのみ焦点を当て、それ以外の領域のトポロジーを完全に潰してしまう位相であり、 $j(\emptyset) \neq \emptyset$  となる代表例です。

### 例 4.3 (閉部分空間への制限位相)

位相空間  $X$  の閉集合  $F$  を一つ固定し、その補開集合を  $V = X \setminus F$  とする。写像  $j_F: \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  を次のように定義する：

$$j_F(U) = U \cup V = U \cup (X \setminus F)$$

集合の分配法則により、 $j_F(U \cap W) = (U \cap W) \cup V = (U \cup V) \cap (W \cup V) = j_F(U) \cap j_F(W)$  が成り立ち、拡張性と冪等性も自明なため、これは核をなす。

## 被覆の条件と直観的意味

この核に空集合を代入すると、 $j_F(\emptyset) = \emptyset \cup (X \setminus F) = X \setminus F$  となり、 $F \neq X$  である限り空集合の像は空にならない。篩  $S \in J_F(U)$  であるための条件は、 $(\bigcup S) \cup (X \setminus F) = U \cup (X \setminus F)$  である。両辺と  $F$  の共通部分をとると、次のように言い換えられる：

$$(\bigcup S) \cap F = U \cap F$$

これは、\*\*「閉集合  $F$  の内部に位置する領域さえ過不足なく通常の開被覆で覆われていれば、 $F$  の外側 ( $X \setminus F$ ) がどれほどスカスカであろうが、あるいは全く覆われていなかろうが被覆と認める」\*\*というルールである。極端な例として、 $U = X \setminus F$  上の空の篩  $\emptyset$  を考えると、 $\emptyset \in J_F(X \setminus F)$  となるため、\*\* $F$  の外側 (潰された領域) では空集合すら被覆として機能する\*\*。

## トポス論的帰結

この位相上の層の圏  $\text{Sh}_{j_F}(X)$  は、大元の空間  $X$  の開集合圏をベースに構築されているにもかかわらず、\*\*閉部分空間  $F$  上の通常の層の圏  $\text{Sh}(F)$  と圏同値\*\*になる：

$$\text{Sh}_{j_F}(X) \cong \text{Sh}(F)$$

これはトポス論における閉部分トポス (closed subtopos) の具体的な構成法を提示している。

## 例 4.4: 開部分空間への制限位相 (open subtopos)

例 4.3 とは対称的に、特定の開集合の内部のみにトポロジーの関心を制限する位相です。

### 例 4.4 (開部分空間への制限位相)

$X$  の開集合  $Y$  を一つ固定する。写像  $j^Y : \text{Open}(X) \rightarrow \text{Open}(X)$  を、Heyting 代数の含意演算を用いて次のように定義する：

$$j^Y(U) = Y \Rightarrow U = \text{Int}((X \setminus Y) \cup U)$$

これが核をなすことは、Heyting 代数における一般的な関係式  $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) = A \Rightarrow B$  および有限交差の分配則から従う。

### 被覆の条件とトポス論的帰結

この核に空集合を代入すると、 $j^Y(\emptyset) = \text{Int}(X \setminus Y) = X \setminus \text{Cl}(Y)$  となる。したがって、 $Y$  が  $X$  において稠密な開集合 ( $\text{Cl}(Y) = X$ ) であるときに限り  $j^Y(\emptyset) = \emptyset$  (稠密な位相) となり、そうでない場合は非稠密な位相となる。この位相において篩が被覆となる条件は、「開集合  $Y$  と交わる部分において、カノニカルな開被覆が達成されていること」である。この位相による層の圏  $\text{Sh}_{j^Y}(X)$  は、\*\*開部分空間  $Y$  上の通常層の圏  $\text{Sh}(Y)$  と圏同値\*\*になる：

$$\text{Sh}_{j^Y}(X) \cong \text{Sh}(Y)$$

幾何学的な「部分空間 (開・閉)」という概念が、トポス論においては「基底にある圏  $\text{Open}(X)$  をそのままに保ちながら、その上の Grothendieck 位相 (核) を書き換える操作」へと一元化されることを意味している。

## 例 4.5: 第一類集合を無視する位相と Baire 空間における一致

記述集合論や測度論的な視点を開集合圏に持ち込む例です。

### 例 4.5 (第一類集合を無視する位相)

位相空間  $X$  を Baire 空間 (Baire space) とする。 $X$  上の第一類集合 (meager set : どこでも稠密でない閉集合の可算和として表される集合、いわゆる瘦せた集合) の全体は、集合の可算和と部分集合をとる操作に関して閉じている (集合論的イデアルをなす)。これを用いて、次の作用素を定義する：

$$j_{\text{meager}}(U) = \bigcup \{V \in \text{Open}(X) \mid V \setminus U \text{ は第一類集合}\}$$

これが核をなすことは、第一類集合のイデアル性と開集合の性質から従うが、Baire 空間においてはさらに驚くべき性質が成り立つ。

### 命題 4.6 (Baire 空間における核の一致)

$X$  が Baire 空間であるならば、任意の開集合  $U \in \text{Open}(X)$  に対して、第一類集合を無視する核  $j_{\text{meager}}$  は、二重否定位相の核  $j_{\neg\neg}$  と完全に一致する：

$$j_{\text{meager}}(U) = \text{Int}(\text{Cl}(U))$$

### 証明

Baire 空間の定義より、任意の空でない開集合は第一類集合にはなり得ない。したがって、開集合  $V$  に対して「 $V$  が第一類集合であること」と「 $V = \emptyset$  であること」は同値である。

まず、 $V \in \text{Open}(X)$  について、 $V \setminus U$  が第一類集合であると仮定する。 $V \setminus \text{Cl}(U)$  は開集合であり、かつ  $V \setminus \text{Cl}(U) \subset V \setminus U$  であるから、第一類集合の部分集合としてこれも第一類集合である。 $X$  が Baire 空間であることから、この開集合は空集合でなければならない。すなわち  $V \setminus \text{Cl}(U) = \emptyset$  であり、これは  $V \subset \text{Cl}(U)$  を意味する。 $V$  は開集合であるから、両辺の内部をとることで  $V \subset \text{Int}(\text{Cl}(U))$  が得られる。したがって、 $j_{\text{meager}}(U) \subset \text{Int}(\text{Cl}(U))$  である。逆に、 $V = \text{Int}(\text{Cl}(U))$  とおく。このとき  $V \setminus U = \text{Int}(\text{Cl}(U)) \setminus U$  である。一般に、任意の開集合  $U$  に対して、その正則開包から自身を引いた差集合  $\text{Int}(\text{Cl}(U)) \setminus U$  は、境界  $\text{Cl}(U) \setminus \text{Int}(U)$  に含まれる。この境界は内点を持たない閉集合 (nowhere dense 集合) であるため、当然第一類集合である。したがって、その部分集合である  $V \setminus U$  も第一類集合となる。ゆえに  $V = \text{Int}(\text{Cl}(U))$  自身が  $j_{\text{meager}}(U)$  の定義の和集合の候補に含まれるため、 $\text{Int}(\text{Cl}(U)) \subset j_{\text{meager}}(U)$  が成り立つ。

以上により、両方向の包含関係から  $j_{\text{meager}}(U) = \text{Int}(\text{Cl}(U)) = j_{\neg\neg}(U)$  が完全に示された。

この命題は、Baire 空間 (例えば完備距離空間や局所コンパクト Hausdorff 空間など) においては、「第一類集合というトポロジ的に極小のゴミを無視すること」と、「二重否定によって論理的なシワを伸ばし、ブルトポスを生成すること」が幾何学的に全く等価な操作であることを示しています。当然、この核も  $j_{\text{meager}}(\emptyset) = \emptyset$  を満たす稠密な位相となります。

## 5. 総括：核の格子構造とトポスの世界観

開集合圏  $\text{Open}(X)$  上の核の全体 (= Grothendieck 位相の全体) それ自身も、包含関係によって\*\*完備格子 (complete lattice)\*\* をなしています。格子の最小元と最大元は次のように対応します：

- **最小の位相 (最も厳しいルール)** : カノニカル位相  $j(U) = U$ 。本物の開被覆しか被覆と認めないため、前層が層になるための条件が最も厳しくなり、結果として削り出される層の圏  $\text{Sh}(X)$  は最も豊かで大きな世界になります。
- **最大の位相 (最も緩いルール)** : 自明な位相  $j(U) = X$ 。空集合を含むあらゆる篩が被覆となってしまうため、すべての前層が自動的に層になりますが、その層の圏は対象が1つ (末端対象) しか存在しない、完全に潰れた自明なトポスになります。

核における空集合の像  $j(\emptyset)$  が空にならないような位相 (閉部分空間への制限など) は、この格子構造の中で「空間の特定の領域を自明に潰す」という役割を担っています。トポス論において幾何学的な「空間を変形・制限・破碎する」という行為は、基底にある圏  $\text{Open}(X)$  を変更することではなく、\*\*その上の被覆ルール (Grothendieck 位相 = 核) を適切に選択し、親となるトポスから新たな部分トポスを削り出す操作\*\*に他ならないのです。

## 引用・参考文献

本稿の執筆にあたり、以下の学術的文献および資料を参照した。各文献の詳細な情報についてはリンク先を参照されたい。

1. Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.
2. Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press.
3. nLab. [nucleus in a locale](#).
4. nLab. [Grothendieck topology](#).
5. nLab. [dense subtopos](#).